Η βέλτιστη κατεύθυνση είναι η $-\nabla f(x^{(k)}) = r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ 10/12/15

$x^{(k+1)} = x^{(k)} + a_{k+1} r^{(k)}$

Υπολογισμός του $a_{k+1}$

$f(x^{(k+1)}) = f(x^{(k)} + ar^{(k)}) = \frac{1}{2}(A(x^{(k)} + ar^{(k)}), x^{(k)} + ar^{(k)}) - (b, x^{(k)} + a_k r^{(k)})$

$= \frac{1}{2}(Ax^{(k)}, x^{(k)}) + \frac{1}{2}a(Ax^{(k)}, r^{(k)}) + \frac{1}{2}a(Ar^{(k)}, x^{(k)}) + \frac{1}{2}a^2(Ar^{(k)}, r^{(k)}) -$

$(b, x^{(k)}) - a(b, r^{(k)}) = f(x^{(k)}) + a(Ax^{(k)} - b, r^{(k)}) + \frac{1}{2}a^2(Ar^{(k)}, r^{(k)}) =$

$= f(x^{(k)}) - a(r^{(k)}, r^{(k)}) + \frac{1}{2}a^2(Ar^{(k)}, r^{(k)})$

$(Ar^{(k)}, x^{(k)}) = (r^{(k)}, Ax^{(k)}) = (Ax^{(k)}, r^{(k)})$

$ax^2 + bx + \gamma$ ελάχιστο στο $x = -\frac{b}{2a}$.

Η $f(x^{(k+1)})$ ελαχιστοποιείται στο

<u>Αλγόριθμος μεθόδου απότομης καθόδου</u> $\boxed{a_{k+1} = \frac{(r^{(k)}, r^{(k)})}{(Ar^{(k)}, r^{(k)})}}$

Δεδομένα $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ συμμ και Θ.Ο, $b \in \mathbb{R}^n$ $\varepsilon > 0$ επιθυμητό σφάλμα. ✪

<u>Κριτήρια σύγκλισης</u>

$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \varepsilon$

$\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k+1)}\|} \leq \varepsilon$

$\|r^{(k)}\| \leq \varepsilon$

$r^{(k)} = b - Ax^{(k)} = Ax - Ax^{(k)} = A(x - x^{(k)}) = Ae^{(k)}$

✪(συνεχίζεται από εδώ) $x^{(0)} = 0$

$r^{(0)} = b$

$k = 0$

<u>Εφόσον</u> $\|r^{(k)}\| > \varepsilon$

$k = k+1$

$a_k = \frac{(r^{(k-1)}, r^{(k-1)})}{(Ar^{(k-1)}, r^{(k-1)})}$

$x^{(k)} = x^{(k-1)} + a_k r^{(k-1)}$

$r^{(k)} = b - Ax^{(k)} \Leftarrow r^{(k-1)} - a_k A r^{(k-1)}$

Τέλος 'εφόσον'

Αποτέλεσμα: $x^{(k)}$ η προσέγγιση της λύσης.

$r^{(k)} = b - Ax^{(k)} = b - A(x^{(k-1)} + a_k \cdot r^{(k-1)}) = b - Ax^{(k-1)} - a_k Ar^{(k-1)} = r^{(k-1)} - a_k \cdot Ar^{(k-1)}$

• Να γίνουν 3 επαναλήψεις της μεθόδου απότομης καθόδου για τη λύση του γραμμικού συστήματος $Ax=b$, με $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $r^{(0)} = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Ar^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a_1 = \frac{(r^{(0)}, r^{(0)})}{(Ar^{(0)}, r^{(0)})} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,

$x^{(1)} = x^{(0)} + a_1 r^{(0)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $r^{(1)} = r^{(0)} - a_1 Ar^{(0)} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ 0+1 \\ 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$Ar^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \frac{(r^{(1)}, r^{(1)})}{(Ar^{(1)}, r^{(1)})} = \frac{1}{2}$, $x^{(2)} = x^{(1)} + a_2 r^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/2 - 0 \\ 0 + 1/2 \\ 1/2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$r^{(2)} = r^{(2)} - a_2 Ar^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 + \frac{1}{2} \\ 1 - 1 \\ 0 + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $Ar^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$a_3 = \frac{(r^{(2)}, r^{(2)})}{(Ar^{(2)}, r^{(2)})} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$, $x^{(3)} = x^{(2)} + a_3 r^{(2)} = \begin{pmatrix} 1/2 + 1/4 \\ 1/2 + 0 \\ 1/2 + 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/2 \\ 3/4 \end{pmatrix}$

Η λύση είναι $x^T = (1\ 1\ 1)$.

Δυο διαδοχικά διανύσματα υπόλοιπο $r^{(k)}, r^{(k-1)}$ είναι ορθογώνια:

$(r^{(k)}, r^{(k-1)}) = (r^{(k-1)} - a_k Ar^{(k-1)}, r^{(k-1)}) = (r^{(k-1)}, r^{(k-1)}) - a_k (Ar^{(k-1)}, r^{(k-1)}) = (r^{(k-1)}, r^{(k-1)}) - \frac{(r^{(k-1)}, r^{(k-1)})}{(Ar^{(k-1)}, r^{(k-1)})} \cdot (Ar^{(k-1)}, r^{(k-1)}) = 0$

$\|e^{(k)}\|_{A^{1/2}} = (Ae^{(k)}, e^{(k)})^{1/2} = (A^{1/2} \cdot e^{(k)}, A^{1/2} e^{(k)})^{1/2} = \|A^{1/2} e^{(k)}\|_2$

$\|e^{(m)}\|_{A^{1/2}} \le \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^m \|e^{(0)}\|_{A^{1/2}}$, k ο δείκτης κατάστασης του A ως πρός $\|\cdot\|_2$, $k = k(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$

Μέθοδος γενικών διευθύνσεων.

Για την εύρεση του $x^{(k+1)}$ από το $x^{(k)}$ επιλέγουμε κατεύθυνση $p^{(k+1)}$ και βελτιστοποιούμε το $a$ ($a_{k+1}$) και τελικά παίρνουμε $x^{(k+1)} = x^{(k)} + a_{k+1} p^{(k+1)}$. Δεν εξασφαλίζεται η σύγκλιση.

## Μέθοδος συζυγών διευθύνσεων.

Οι κατευθύνσεις $p^{(k)}$ επιλέγονται να είναι Α-ορθογώνιες.

$x,y$ Α-ορθογώνια ανν $(Ax,y)=0$.

Βρίσκουμε την ακριβή λύση σε το πολύ n-επαναλήψεις.

## Μέθοδος συζυγών κλίσεων.

Η μέθοδος συζυγών διευθύνσεων, όπου ως σύνολο αναφοράς γρ. ανεξ. διανυσμ. επιλέγουμε το $\{r^{(0)}, r^{(1)}, \dots, r^{(n-1)}\}$ για την κατασκευή των Α-ορθογώνιων κατευθύνσεων $p^{(k)}$, $k=1,2,\dots,n$.

## Αλγόριθμος μεθόδου συζυγών κλίσεων.

Δεδομένα $A\in\mathbb{R}^{n,n}$ συμμ. κ' $\underline{\underline{θ.ο}}$, $b\in\mathbb{R}^n$, $\varepsilon>0$.

$x^{(0)}=0$, $r^{(0)}=b$, $p^{(1)}=r^{(0)}=b$.

$$a_1=\frac{(r^{(0)},r^{(0)})}{(Ap^{(1)},p^{(1)})}$$

$x^{(1)}=x^{(0)}+a_1p^{(1)}$

$r^{(1)}=b-Ax^{(1)} \quad (=r^{(0)}-a_1Ap^{(1)})$

$k=1$

Εφόσον $\|r^{(k)}\|>\varepsilon$ κ' $k<n$

$k=k+1$

$$b_k=\frac{(r^{(k-1)},r^{(k-1)})}{(r^{(k-2)},r^{(k-2)})}$$

$p^{(k)}=r^{(k-1)}+\beta_k\cdot p^{(k-1)}$

$$a_k=\frac{(r^{(k-1)},r^{(k+1)})}{(Ap^{(k)},p^{(k)})}$$

$x^{(k)}=x^{(k-1)}+a_kp^{(k)}$

$r^{(k)}=b-Ax^{(k)} \quad (=r^{(k-1)}-a_kAp^{(k)})$

Τέλος 'Εφόσον'

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x^{(0)}=0, \; r^{(0)}=p^{(1)}=b=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Ap^{(1)}=\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_1=\frac{(r^{(0)},r^{(0)})}{(Ap^{(1)},p^{(1)})}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}, \quad x^{(1)}=x^{(0)}+a_1 p^{(1)}=\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$r^{(1)}=r^{(0)}-a_1 Ap^{(1)}=\begin{bmatrix} 1-1 \\ 0+1 \\ 1-1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2=\frac{(r^{(1)},r^{(1)})}{(r^{(0)},r^{(0)})}=\frac{1}{2},$$

$$p^{(2)}=r^{(1)}+b_2 p^{(1)}=\begin{bmatrix} 0+1/2 \\ 1+0 \\ 0+1/2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

$$Ap^{(2)}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_2=\frac{(r^{(1)},r^{(1)})}{(Ap^{(2)},p^{(2)})}=\frac{1}{1}=1, \quad x^{(2)}=x^{(1)}+a_2 p^{(2)}=$$

$$=\begin{bmatrix} 1/2+1/2 \\ 0+1 \\ 1/2+1/2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad r^{(2)}=r^{(1)}-a_1 Ap^{(2)}=\begin{bmatrix} 0-0 \\ 1-1 \\ 0-0 \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Το σύνολο $\{r^{(0)}, r^{(1)}, \dots, r^{(n-1)}\}$, αποτελεί ορθογώνια βάση.

$\left(\frac{\sqrt{K}-1}{\sqrt{K}+1}\right)^m$, $Ax=b \Leftrightarrow PAx=Pb$, $P$ συμμ. κ' θ.ο (θετικά ορισμένος)